EL NÚMERO DE ORO

Un número nada fácil de imaginar que convive con la humanidad porque aparece en la naturaleza y desde la época griega hasta nuestros días en el arte y el diseño. Es el llamado número de oro (representado habitualmente con la letra griega ϕ) o también sección áurea, proporción áurea o razón áurea.

Tres números con nombre

Hay tres números de gran importancia en matemáticas y que "paradójicamente" nombramos con una letra. Estos números son:

- El número designado con la letra griega π = 3,14159....(Pi) que relaciona la longitud de la circunferencia con su diámetro (Longitud = 2.π.radio= π.diámetro).

- El número e = 2´71828......, inicial del apellido de su descubridor Leonhard

Euler (matemático suizo del siglo XVIII) que aparece como límite de la sucesión de término general $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

- El número designado con letra griega ϕ = 1,61803... (Fi), llamado número de oro y que es la inicial del nombre del escultor griego Fidias que lo tuvo presente en sus obras.

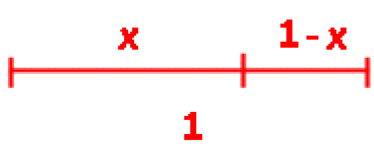
Los tres números tienen infinitas cifras decimales y no son periódicos (sus cifras decimales no se repiten periódicamente). A estos números se les llama irracionales. Cuándo se utilizan se escriben solamente unas cuantas cifras decimales (en los tres ejemplos de arriba hemos tomado 5).

Una diferencia importante desde el punto de vista matemático entre los dos primeros y el número de oro es que los primeros no son solución de ninguna ecuación polinómica (a estos números se les llama trascendentes), mientras que el número de oro si que lo es. Efectivamente, una de las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 - x - 1 = 0$ es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que da como resultado el número de oro.

La sección áurea y el número de oro

La sección áurea es la división armónica de una segmento en media y extrema razón. Es decir, que el segmento menor es al segmento mayor, como este es a la totalidad. De esta manera se establece una relación de tamaños con la misma proporcionalidad entre el todo dividido en mayor y menor. Esta proporción o forma de seleccionar proporcionalmente una línea se llama proporción áurea.

Tomemos un segmento de longitud uno y hagamos en el la división indicada anteriormente



Aplicando la proporción áurea obtenemos la siguiente ecuación que tendremos que resolver

$$\frac{1-x}{x}=\frac{x}{1}\Rightarrow 1-x=x^2\Rightarrow x^2+x-1=0$$

Una de las soluciones de esta ecuación (la solución positiva) es x=$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

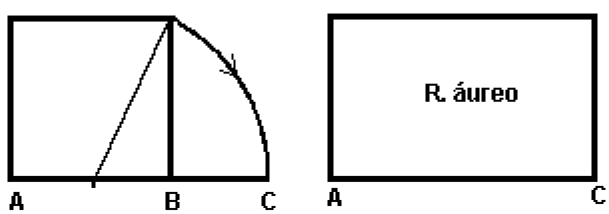
Lo sorprendente ahora es calcular el valor que se obtiene al dividir el segmento mayor entre el menor,

$$\frac{x}{1-x}=\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right).\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3-\sqrt{5}\right).\left(3+\sqrt{5}\right)}=\frac{-3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{9-5}=$$
$$=\frac{2+2\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1'618...\Rightarrow \text{el numero de oro}$$

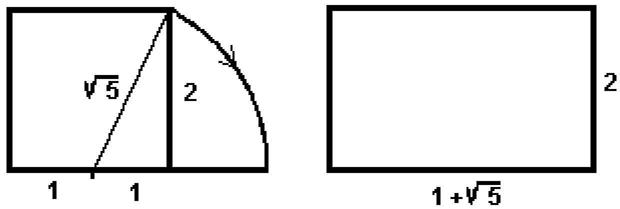
Es decir, la relación entre las dos partes en que dividimos el segmento es el número de oro.

El rectángulo áureo

Dibujamos un cuadrado y marcamos el punto medio de uno de sus lados. Lo unimos con uno de los vértices del lado opuesto y llevamos esa distancia sobre el lado inicial, de esta manera obtenemos el lado mayor del rectángulo.

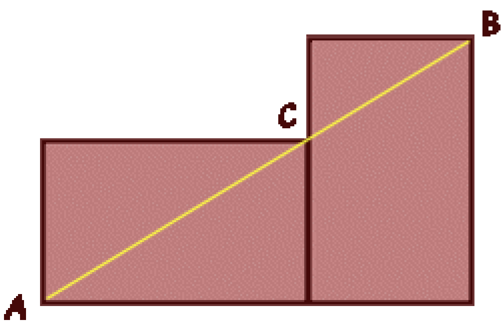


Si el lado del cuadrado vale 2 unidades, es claro que el lado mayor del rectángulo vale $1+\sqrt{5}$ por lo que la proporción entre los dos lados es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nuestro número de oro).



Obtenemos así un rectángulo cuyos lados están en proporción áurea. A partir de este rectángulo podemos construir otros semejantes que, como veremos mas adelante, se han utilizando en arquitectura (Partenón, pirámides egipcias) y diseño (tarjetas de crédito, carnets, cajetillas de tabaco, etc...).

Una propiedad importante de los triángulos áureos es que cuando se colocan dos iguales como indica la figura, la diagonal AB pasa por el vértice C.



En efecto, situemos los rectángulos en unos ejes de coordenadas con origen en el punto A. Las coordenadas de los tres puntos serán entonces:

$$A(0,0)$$
$$B(3+\sqrt{5},1+\sqrt{5})$$
$$C(1+\sqrt{5},2)$$

Vamos a demostrar que los vectores $\overrightarrow{AB}=(3+\sqrt{5},1+\sqrt{5})$ y $\overrightarrow{AC}=(1+\sqrt{5},2)$ son proporcionales:

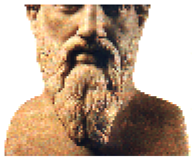
$$\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}=\frac{3-3\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{5}^2}{1^2-\sqrt{5}^2}=\frac{3-2\sqrt{5}-5}{1-5}=\frac{-2-2\sqrt{5}}{-4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto, los tres puntos están alineados.

Pitágoras y el número de oro

Pitágoras (c. 582-c. 500 a.C.), filósofo y matemático griego, nació en la isla de Samos. Fue instruido en las enseñanzas de los primeros filósofos jonios Tales de

Mileto, Anaximandro y Anaxímenes. Se dice que **Pitágoras** había sido condenado a exiliarse de Samos por su aversión a la tiranía de

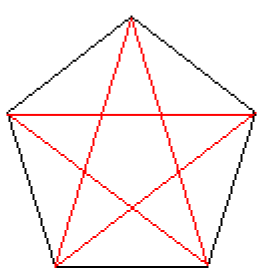


Polícrates. Hacia el 530 a.C. se instaló en Crotona, una colonia griega al sur de Italia, donde fundó un movimiento con propósitos religiosos, políticos y filosóficos, conocido como pitagorismo. La filosofía de **Pitágoras** se conoce sólo a través de la obra de sus discípulos.

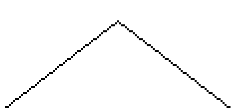
Los pitagóricos asumieron ciertos misterios, similares en muchos puntos a los enigmas del orfismo. Aconsejaban la obediencia y el silencio, la abstinencia de consumir alimentos, la sencillez en el vestir y en las posesiones, y el hábito del autoanálisis. Los pitagóricos creían en la inmortalidad y en la trasmigración del alma. Se dice que el propio **Pitágoras** proclamaba que él había sido Euphorbus, y combatido durante la guerra de Troya, y que le había sido permitido traer a su vida terrenal la memoria de todas sus existencias previas.

Entre las amplias investigaciones matemáticas realizadas por los pitagóricos se encuentran sus estudios de los números pares e impares y de los números primos y de los cuadrados, esenciales en la teoría de los números. Desde este punto de vista aritmético, cultivaron el concepto de número, que llegó a ser para ellos el principio crucial de toda proporción, orden y armonía en el universo. A través de estos estudios, establecieron una base científica para las matemáticas. En geometría el gran descubrimiento de la escuela fue el teorema de la hipotenusa, conocido como teorema de **Pitágoras**, que establece que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

Una revuelta provocada en Crotona, por una asociación de ideas contrarias a las pitagóricas, terminó con el incendio de la sede. Se cree que **Pitágoras** se vio obligado a huir de Crotona y murió en Metaponto. La persecución de los pitagóricos provocó el éxodo a la Grecia Continental, dando lugar a la difusión de las ideas pitagóricas.

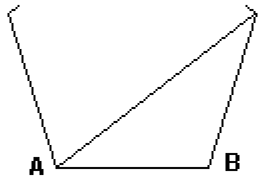


La estrella pentagonal o pentágono estrellado era, según la tradición, el símbolo de los seguidores de **Pitágoras**. Los pitagóricos pensaban que el mundo estaba configurado según un orden numérico, donde sólo tenían cabida los números fraccionarios. La casualidad hizo que en su propio símbolo se encontrara un número raro: el numero de oro.

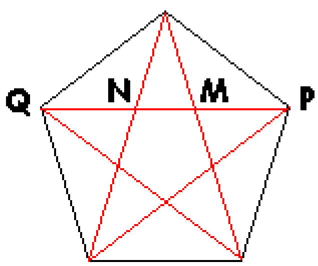


c

Por ejemplo, la relación entre la diagonal del pentágono y su lado es el número de oro.



$$\frac{AC}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'61803...$$



También podemos comprobar que los segmentos QN, NP y QP están en proporción áurea.

Ver la sección La trigonometría y el número de oro.

La sucesión de Fibonacci

Consideremos la siguiente sucesión de números:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...

Cada número a partir del tercero, se obtiene sumando los dos que le preceden. Por ejemplo, 21 = 13 + 8; el siguiente a 34 será 34 + 21 = 55.

Esta sucesión es la llamada "sucesión de **Fibonacci**" *.

****Es el sobrenombre con el que se conoció al rico comerciante Leonardo de Pisa (1170-1240). Viajó por el Norte de África y Asia y trajo a Europa algunos de los conocimientos de la cultura árabe e hindú, entre otros la ventaja del sistema de numeración arábigo (el que usamos) frente al romano.***

La sucesión de **Fibonacci** presenta diversas regularidades numéricas. Para que resulte más sencillo las hemos enunciado en casos particulares (aunque se cumplen en general) y hemos calculado los primeros catorce términos de esta sucesión:

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}
1	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**	**89**	**144**	**233**	**377**

- Si sumas los cuatro primeros términos y añades 1, te sale el sexto

(1+1+2+3 + 1 = 8). Si sumas los cinco primeros términos y añades 1, te sale el séptimo (1+1+2+3+5 + 1 = 13).

- Si sumas los tres primeros términos que ocupan posición impar (t_1,t_3,t_5) sale el sexto término (t_6), (1+2+5 = 8). Si sumas los cuatro primeros términos que ocupan posición impar (t_1,t_3,t_5,t_7) sale el octavo término (t_8), (1+2+5+13 = 21).

- Si sumas los tres primeros términos que ocupan posición par (t_2,t_4,t_6) y añades 1, sale el séptimo término (t_7), (1+3+8 + 1 =13). Si sumas los cuatro primeros términos que ocupan posición par (t_2,t_4,t_6,t_8) y añades 1, sale el noveno término (t_9), (1+3+8+21 + 1 =34).

¡Aún las hay más difíciles de imaginar!

- Tomemos dos términos consecutivos, por ejemplo: t_4=3 y t_5=5; elevando al cuadrado y sumando: 32+52=9+25=34 que es el noveno (4+5) término de la sucesión. Tomando t_6=8 y t_7=13; elevando al cuadrado y sumando: 82+132=64+169=233 que es el (6+7) decimotercero término de la sucesión.

- Pero si elevamos al cuadrado los cinco primeros términos y los sumamos, sale el producto del quinto y el sexto término: 12+12+22+32+52=40=5*8. Si hacemos lo mismo para los seis primeros términos, sale el producto del sexto y el séptimo término:12+12+22+32+52+82=104=8*13.

- Y quizás la más sorprendente sea la siguiente propiedad. Dividamos dos términos consecutivos de la sucesión, siempre el mayor entre el menor y veamos lo que obtenemos:

1 : 1 = 1
2 : 1 = 2
3 : 2 = 1´5
5 : 3 = 1´66666666
8 : 5 = 1´6
13 : 8 = 1´625
21 :13 = 1´6153846....
34 :21 = 1´6190476....
55 :34 = 1´6176471....
89 :55 = 1´6181818....

Al tomar más términos de la sucesión y hacer su cociente nos acercamos al número de oro. Cuanto mayores son los términos, los cocientes se acercan más a ϕ=1,61803.... En lenguaje matemático,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Efectivamente,

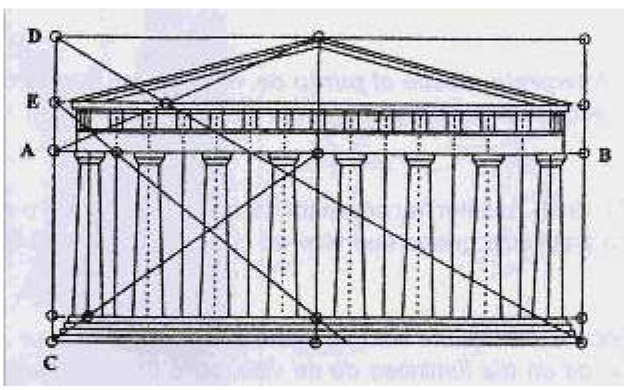
$$L = \lim \frac{t_n}{t_{n-1}} = \lim \frac{t_{n-1}+t_{n-2}}{t_{n-1}} = \lim \left(1+\frac{t_{n-2}}{t_{n-1}}\right) =$$

$$= 1+\lim \frac{t_{n-2}}{t_{n-1}} = 1+\frac{1}{L} \Rightarrow L = 1+\frac{1}{L} \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \phi$$

El número de oro en el arte, el diseño y la naturaleza

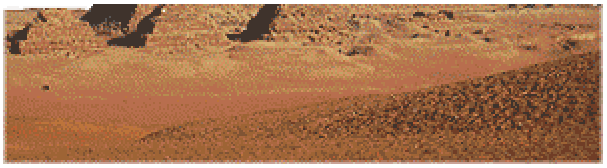
El número áureo aparece, en las proporciones que guardan edificios, esculturas, objetos, partes de nuestro cuerpo, ...

Un ejemplo de rectángulo áureo en el arte es el alzado del Partenón griego.

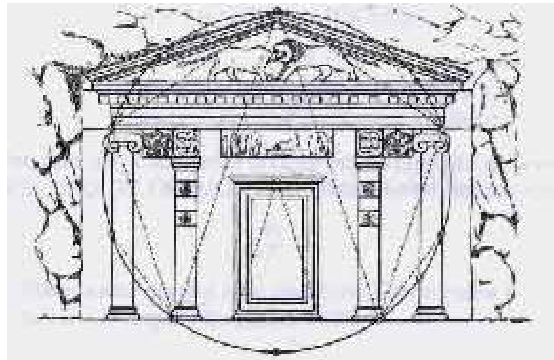


En la figura se puede comprobar que AB/CD=ϕ. Hay más cocientes entre sus medidas que dan el número áureo, por ejemplo: AC/AD=ϕ y CD/CA=ϕ.

Hay un precedente a la cultura griega donde también apareció el número de oro. En **La Gran Pirámide de Keops**, el cociente entre la altura de



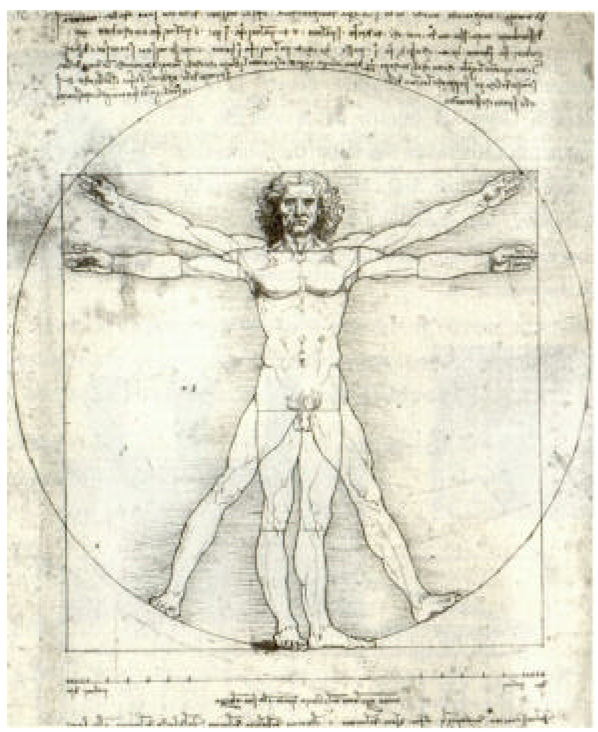
uno de los tres triángulos que forman la pirámide y el lado es 2ϕ.



Ya vimos que el cociente entre la diagonal de un pentágono regular y el lado de dicho pentágono es el número áureo. En un pentágono regular está basada la construcción de la **Tumba Rupestre de Mira** en Asia Menor.

Ejemplos de rectángulos áureos los podemos encontrar en las tarjetas de crédito, en nuestro carnet de identidad y también en las cajetillas de tabaco.

Unas proporciones armoniosas para el cuerpo, que estudiaron antes los griegos y romanos, las plasmó en este dibujo **Leonardo da Vinci.** Sirvió para ilustrar el libro *La Divina Proporción* de **Luca Pacioli** editado en 1509.



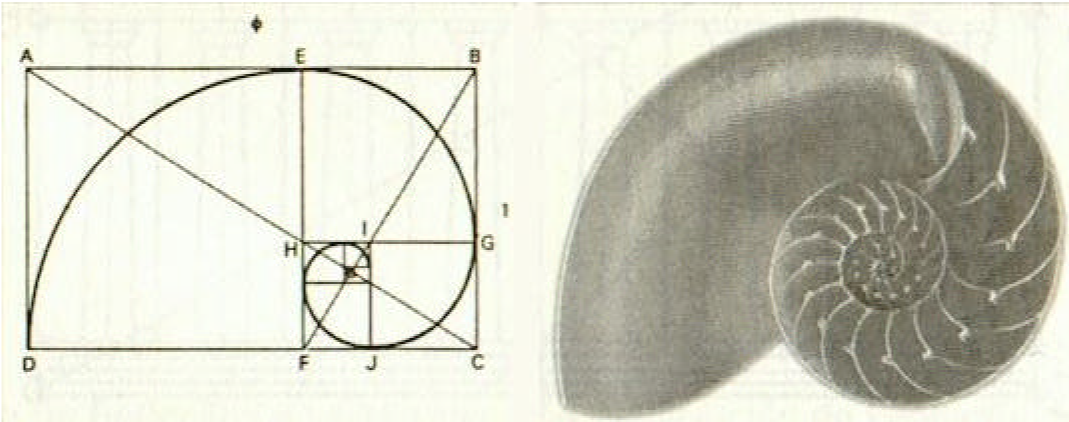
En dicho libro se describen cuales han de ser las proporciones de las construcciones artísticas. En particular, **Pacioli** propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas. Estirando manos y pies y haciendo centro en el ombligo se dibuja la circunferencia. El cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo que coincide, en un cuerpo armonioso, con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando los brazos están extendidos y formando un ángulo de 90º con el tronco. Resulta que el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia) es el número áureo.

El cuadro de Dalí *Leda atómica*, pintado en 1949, sintetiza siglos de tradición matemática y simbólica, especialmente pitagórica. Se trata de una filigrana basada en la proporción áurea, pero elaborada de tal forma que no es evidente para el espectador. En el boceto de 1947 se advierte la meticulosidad del análisis geométrico realizado por Dalí basado en el pentagrama místico pitagórico.

En la naturaleza, aparece la proporción áurea también en el crecimiento de las plantas, las piñas, la distribución de las hojas en un tallo, dimensiones de insectos y pájaros y la formación de caracolas.

La espiral logarítmica

Si tomamos un rectángulo áureo ABCD y le sustraemos el cuadrado AEFD cuyo lado es el lado menor AD del rectángulo, resulta que el rectángulo EBCF es áureo. Si después a éste le quitamos el cuadrado EBGH, el rectángulo resultante HGCF también es áureo. Este proceso se puede reproducir indefinidamente, obteniéndose una sucesión de rectángulos áureos encajados que convergen hacia el vértice O de una espiral logarítmica.

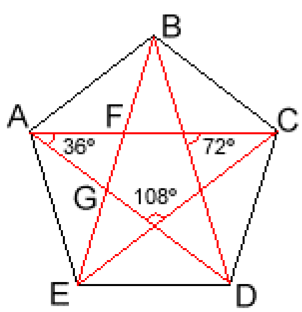


Esta curva ha cautivado, por su belleza y propiedades, la atención de matemáticos, artistas y naturalistas. Se le llama también espiral equiangular (el ángulo de corte del radio vector con la curva es constante) o espiral geométrica (el radio vector crece en progresión geométrica mientras el ángulo polar decrece en progresión aritmética). J. Bernoulli, fascinado por sus encantos, la llamó *spira mirabilis*, rogando que fuera grabada en su tumba.

La espiral logarítmica vinculada a los rectángulos áureos gobierna el crecimiento armónico de muchas formas vegetales (flores y frutos) y animales (conchas de moluscos), aquellas en las que la forma se mantiene invariante. El ejemplo más visualmente representativo es la concha del *nautilus*.

La trigonometría y el número de oro

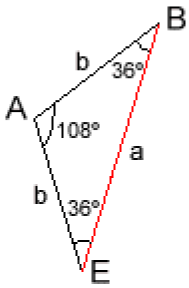
Consideremos un pentágono regular en el cual se han dibujado las diagonales. En



esta figura sólo aparecen tres ángulos diferentes. Miden 36º, 72º y 108º. La relación entre estos ángulos es la siguiente: 72 es el doble de 36 y 108 es el triple de 36. Hay varios tipos diferentes de triángulos isósceles, de los cuales seleccionamos tres: los triángulos ABE, ABF y AFG. El resto de triángulos son semejantes a alguno de estos y no aportan información adicional. Finalmente, hay cuatro segmentos diferentes en estos triángulos, que llamaremos: BE=a, AB=AE=b, AF=BF=AG=c y GF=d. Las longitudes de estos segmentos cumplen: a>b>c>d.

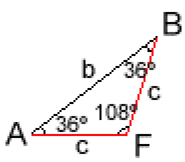
Consideremos cada uno de estos triángulos por separado y apliquemos el teorema del seno.

Triángulo ABE



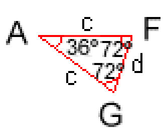
$$\frac{a}{\text{sen}108^\circ} = \frac{b}{\text{sen}36^\circ} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\text{sen}108^\circ}{\text{sen}36^\circ}$$

Triángulo ABF



$$\frac{b}{\text{sen}108^\circ} = \frac{c}{\text{sen}36^\circ} \rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\text{sen}108^\circ}{\text{sen}36^\circ}$$

Triángulo AFG



$$\frac{c}{\text{sen}72^\circ} = \frac{d}{\text{sen}36^\circ} \rightarrow \frac{c}{d} = \frac{\text{sen}72^\circ}{\text{sen}36^\circ} = \frac{\text{sen}108^\circ}{\text{sen}36^\circ}$$

Como 72º=180º-108º, se verifica que sen72º=sen108º.

En consecuencia podemos establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{\text{sen}108^\circ}{\text{sen}36^\circ} = 1,618033988...$$

Es decir, una vez ordenadas las longitudes de los cuatro segmentos de mayor a menor, la razón entre cada una de ellas y la siguiente es constante e igual a nuestro número de oro.

Tomando la primera de las proporciones, teniendo en cuenta que c=a-b y haciendo b=1:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a-1} \rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ (el numero de oro)

Es decir, dos de estos segmentos consecutivos cumplen la proporción áurea.

Como consecuencia, se verifica $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\mathrm{sen}108^\circ}{\mathrm{sen}36^\circ}$.

Curiosidades áureas

Potencias. Los números ϕ^{-1}, ϕ y ϕ^2 guardan unas curiosas relaciones entre si. Efectivamente, podemos deducirlas a partir de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ que tiene como solución el número de oro:

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \rightarrow \phi^2 = \phi + 1$$

Dividiendo la ecuacion entre ϕ:

$$\phi - 1 - \frac{1}{\phi} = 0 \rightarrow \frac{1}{\phi} = \phi - 1$$

Potencias 2. Consideremos la sucesión de término general: $a_n = \phi^n$. Si calculamos los primeros términos, podemos observar una curiosa relación entre ellos. Calculando primero algunas potencias

$$\phi^3 = \phi^2 \cdot \phi = (\phi+1)\cdot\phi = \phi^2 + \phi = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1$$
$$\phi^4 = \phi^3 \cdot \phi = (2\phi+1)\cdot\phi = 2\phi^2 + \phi = 2(\phi+1) + \phi = 3\phi + 2$$

podemos concluir que la sucesión dada se convierte en

$$\phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \ldots \rightarrow \phi, \phi+1, 2\phi+1, 3\phi+2, \ldots$$

Evidentemente, cada término a partir del tercero se puede obtener sumando los dos anteriores. Lo curioso es que esta relación es la misma que se verifica en la sucesión de Fibonacci.

Limites. Comprobemos que los siguientes límites dan como resultado el número de oro:

1 2

$$\lim\left[\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}\right]=\lim 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}=\phi$$

1. Llamemos "L" al valor del límite. Fácilmente se comprueba que se verifica la ecuación $\sqrt{1+L}=L$. Elevando al cuadrado los dos miembros y pasando todos los términos a la izquierda se obtiene la ecuación final $L^2-L-1=0$. Una de las soluciones de esta ecuación es nuestro número de oro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Sea "M" el valor del límite. Se comprueba la relación $1+\frac{1}{M}=M$. Quitando denominadores y pasando todos los términos a la izquierda se obtiene la ecuación $M^2-M-1=0$ cuya solución positiva es el número de oro.

Página creada por Ignacio A. Langarita Felipe
nacholan.net