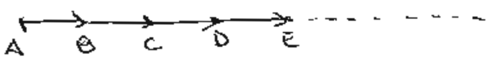
GEOMETRÍA

1.- Dado el vector $\overrightarrow{AB}$ dibujar los vectores $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \ldots$ Que sean todos ellos equipolentes al vector $\overrightarrow{AB}$ ¿En qué disposición están estos puntos?

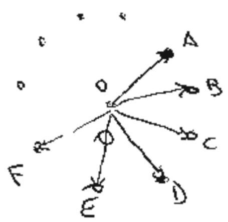


En línea recta

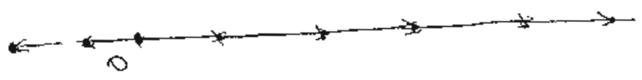
2.- Se considera en el espacio un pto fijo O. Se toman representantes de origen O de todos los vectores libres que tienen

a) el mismo módulo b) la misma dirección

¿Qué figura determinan los extremos de estos vectores en cada uno de los casos?



Una circunferencia



una recta

3.- De las siguientes relaciones cuales son verdaderas y porqué

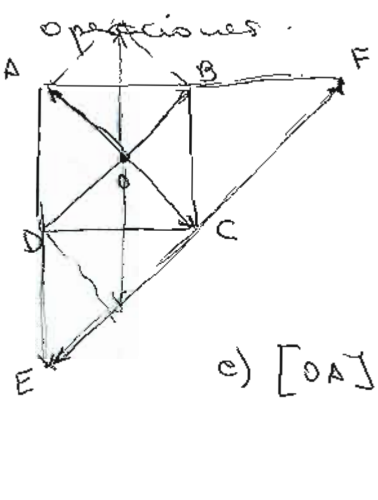
a) $\overrightarrow{AB} \in [\overrightarrow{AB}]$ Verdadera el vector fijo es un elemento del vector libre.

b) $\overrightarrow{AB} \subset [\overrightarrow{AB}]$ Falsa el vector fijo no es un conjunto

c) $\overrightarrow{AB} = [\overrightarrow{AB}]$ Falsa uno es vector libre y otro fijo

d) $\overrightarrow{AB} \neq [\overrightarrow{AB}]$ Falsa no se pueden comparar.

4.- Dibujar un cuadrado ABCD. Efectuar las siguientes operaciones.



a) $[\overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{BD}] = [\overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{CE}] = \boxed{2[\overrightarrow{AD}]}$

$[\overrightarrow{AC}] - [\overrightarrow{BD}] = [\overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{CF}] = \boxed{2[\overrightarrow{AB}]}$

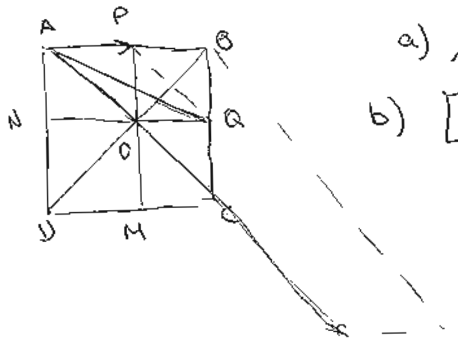
b) $[\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BC}] = \boxed{[\overrightarrow{AC}]}$

c) $[\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{CD}] = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BA}] = \boxed{\vec{0}}$

d) $[\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{BC}] + [\overrightarrow{CD}] + [\overrightarrow{DA}] = \boxed{\vec{0}}$

e) $[\overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{OB}] + [\overrightarrow{OC}] + [\overrightarrow{OD}] = \boxed{\vec{0}}$

5.-



a) $\frac{1}{2}[\vec{AB}] + \frac{1}{2}[\vec{AC}] = [\vec{AP}] + [\vec{AO}] = \boxed{[\vec{AQ}]}$

b) $[\vec{AB}] + 2[\vec{AC}]$

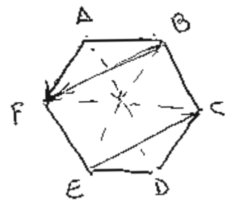
c) $\frac{1}{2}[\vec{BC}] - \frac{1}{2}[\vec{NQ}] + [\vec{OC}] =$

$= [\vec{BQ}] - [\vec{NO}] + [\vec{OC}] =$

$= [\vec{OM}] + [\vec{ON}] + [\vec{OC}] =$

$= [\vec{OD}] + [\vec{OC}] = \boxed{2[\vec{OM}]}$

6.- Sea el hexágono regular ABCDEF. Expresar como combinación lineal de $[\vec{AB}]$ y $[\vec{AF}]$ los siguientes vectores.



$[\vec{BF}] = [\vec{BA}] + [\vec{AF}] = \boxed{-[\vec{AB}] + [\vec{AF}]}$

$[\vec{EC}] = -[\vec{BF}] = \boxed{[\vec{AB}] - [\vec{AF}]}$

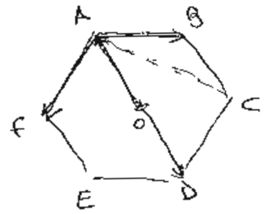
$[\vec{AO}] = \boxed{[\vec{AB}] + [\vec{AF}]}$

$[\vec{AD}] = 2[\vec{AO}] = \boxed{2[\vec{AB}] + 2[\vec{AF}]}$

$[\vec{AE}] = [\vec{AO}] + [\vec{AF}] = \boxed{[\vec{AB}] + 2[\vec{AF}]}$

$[\vec{AC}] = [\vec{AB}] + [\vec{AO}] = \boxed{2[\vec{AB}] + [\vec{AF}]}$

7.- Sea el hexágono regular ABCDEF y sea O el centro. Si el lado del hexágono es 1. Calcula:



a) $\vec{AB} \cdot \vec{AF} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AF}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AF}) =$

$= 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = \boxed{-\frac{1}{2}}$

b) $\vec{OA} \cdot \vec{OD} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OD}| \cos(\vec{OA}, \vec{OD}) =$

$= 1 \cdot 1 \cdot \cos 180^\circ = \boxed{-1}$

c) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$

$|\vec{AC}|^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = 2 - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 3 \Rightarrow \vec{AC} = \sqrt{3}$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}$

d) $\vec{AB}\ \vec{AD} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AD}) = 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{1}$.

e) $\vec{EF} \cdot \vec{OA} = |\vec{EF}| \cdot |\vec{OA}| \cdot \cos(\vec{EF}, \vec{OA}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = \boxed{1}$

8.- Conocidos los datos D calcular los datos A.

a) D: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = 8$ A: $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c})$; $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{b} + \vec{c})$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = 7 - 8 = \boxed{-1}$.

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot (2\vec{b} + \vec{c}) = 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 2 \cdot 7 + 8 = 14 + 8 = \boxed{22}$

b) D: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 5$; $\vec{a}\cdot\vec{c} = 6$ A: $\vec{a}(2\vec{b}+6\vec{c})$; $(-6\vec{a})\cdot(4\vec{b}-3\vec{c})$

$\vec{a}\cdot(2\vec{b}+6\vec{c}) = 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\vec{a}\cdot\vec{c} = 2\cdot 5 + 6\cdot 6 = \boxed{46}$

$(-6\vec{a})\cdot(4\vec{b}-3\vec{c}) = -24\,\vec{a}\cdot\vec{b} + 18\,\vec{a}\cdot\vec{c} = -24\cdot 5 + 18\cdot 6 = \boxed{-12}$

c) D: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 27$ A: $(7\vec{a})\cdot\vec{b}$; $(3/4\,\vec{a})\cdot(-3/5\,\vec{b})$

$(7\vec{a})\cdot\vec{b} = 7\,\vec{a}\cdot\vec{b} = 7\cdot 27 = \boxed{189}$

$(3/4\,\vec{a})\cdot(-3/5\,\vec{b}) = -\frac{9}{20}\,\vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{9}{20}\cdot 27 = \boxed{-\frac{243}{20}}$

9.- Conocidos los datos D calcular A.

a) D: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 6$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4$ A: $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$; $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = 36 + 2\cdot 4 + 36 =$
$= \boxed{80}$

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{a}) = 36$
$\vec{b}\cdot\vec{b} = 36$

$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b} = 36 - 36 = 0$

b) $|\vec{a}| = 4$ $|\vec{b}| = 6$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 8$

$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}} = \sqrt{4^2 + 2\cdot 8 + 6^2} =$
$= \sqrt{16+16+36} = \boxed{\sqrt{68}}$

$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}} = \sqrt{16-16+36} = \boxed{6}$

c) D: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ $(\vec{a},\vec{b}) = \pi/4$ A: $(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{a}-\vec{b})$; $(\vec{b}\,\widehat{,}\,\vec{a}+\vec{b})$

$$\cos(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{a}-\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\sqrt{2-\sqrt{2}}} =$$

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2} = \sqrt{2|\vec{a}|^2 - \sqrt{2}\,|\vec{a}|^2} = |\vec{a}|\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$$= \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{a}|^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{|\vec{a}|^2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}}$$

$$\cos(\vec{b},\vec{a}+\vec{b}) = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|\vec{b}|\,|\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|\,|\vec{a}|\sqrt{2+\sqrt{2}}} =$$

$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2} = \sqrt{2|\vec{a}|^2 + \sqrt{2}\,|\vec{a}|^2} = |\vec{a}|\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{2}/2 - 1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$$

10.– Dados los vectores $\vec{u}(3,3,2)$, $\vec{v}(5,-2,1)$, $\vec{w}(1,-1,0)$

a) Halla los vectores:

$\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w} = (3,3,2) - (10,-4,2) + (3,-3,0) =$
$= \boxed{(-4,\ 4,\ 0)}$

$-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w} = (-6,-6,-4) + (5,-2,1) - (4,-4,0) =$
$= \boxed{(-5,\ -4,\ -3)}$

b) Calcula dos números a y b tales que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

$(3,3,2) = a(5,-2,1) + b(1,-1,0)$

$3 = 5a + b$ $\quad$ $3 = 10 + b \Rightarrow \boxed{b = -7}$
$3 = -2a - b$ $\quad$ $3 = -4 + 7$ $\quad$ $\boxed{\vec{u} = 2\vec{v} - 7\vec{w}}$
$\boxed{2 = a}$

c) Expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$

$7\vec{w} = -\vec{u} + 2\vec{v}$ $\quad$ $\boxed{\vec{w} = -\frac{1}{7}\vec{u} + \frac{2}{7}\vec{v}}$

11.– Sean $\vec{u}(-1,2,1)$, $\vec{v}(2,-1,3)$, $\vec{w}(2,2,8)$. Estudiar si tienen sentido las siguientes expresiones, en caso afirmativo calcular las soluciones.

a) $x \cdot \vec{u} = \vec{v}$ $\quad$ Sí tiene sentido.

$(-x, 2x, x) = (2,-1,3)$ $\quad$ No tiene solución

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{w}$ $\quad$ No tiene sentido.

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot x = \vec{w}$ $\quad$ Sí tiene sentido

$x(1,1,4) = (2,2,8) \Rightarrow \boxed{x = 2}$

d) $\vec{v} \cdot \vec{x} = 1$ $\quad$ Sí tiene sentido.

$(2,-1,3)(x,y,z) = 1 \Rightarrow 2x - y + 3z = 1 \Rightarrow y = 1 - 2x - 3z$

$\boxed{\vec{x}(\alpha,\ 1-2\alpha-3\beta,\ \beta)}$

12.– Comprueba que no es posible expresar el vector $\vec{x}(3,-1,0)$ como combinación lineal de $\vec{u}(1,2,-1)$ y $\vec{v}(2,-3,5)$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 2 + 5 - 9 = 28 \neq 0.$$

No son coplanarios $\Rightarrow$ son independientes $\Rightarrow$ no se puede $\vec{x}$ escribir como comb. lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

13.- ¿Cuales de los siguientes vectores tienen la misma dirección?

$\vec{a}(1,-3,2)$ $\vec{b}(2,0,1)$ $\vec{c}(-2,6,-4)$ $\vec{d}(5,-15,10)$ $\vec{e}(10,-30,5)$

$\vec{a} \parallel \vec{c}$ $\vec{a} \downarrow \vec{c}$ $\vec{c} = -2\vec{a}$

$\vec{a} \parallel \vec{d}$ $\vec{a} \uparrow \vec{d}$ $\vec{d} = 5\vec{a}$

14.- Comprueba que cualquiera de los vectores $\vec{a}(1,2,3)$ $\vec{b}(2,1,3)$ $\vec{c}(1,0,1)$ puede expresarse como combinación lineal de los demás.

$\vec{a} \nparallel \vec{b} \nparallel \vec{c}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+6-3-4=0 \Rightarrow \text{son coplanarios} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ son linealmente dependientes, como no tienen la misma dirección $\Rightarrow$ cada uno se puede poner como combinación lineal de los otros.

15.- Halla a, b y c tales que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=0$ siendo $\vec{u}(3,0,1)$, $\vec{v}(1,-1,0)$, $\vec{w}(1,0,1)$

$$\begin{cases} 3a+b+c=0 & \Rightarrow 3a-a=0 \Rightarrow \boxed{a=0} \\ -b=0 & \Rightarrow \boxed{b=0} \\ a+c=0 & \Rightarrow c=-a \ \boxed{0=c} \end{cases}$$

16.- Halla los valores a, b y c para que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=0$ siendo $\vec{u}(1,-1,0)$ $\vec{v}(1,1,1)$ $\vec{w}(2,0,1)$. ¿Cuántas soluciones hay?

$$\begin{cases} a+b+2c=0 \\ -a+b=0 \Rightarrow a=b=-c \\ b+c=0 \Rightarrow b=-c \end{cases} \quad b+b-2b=0 \quad \boxed{\begin{matrix} a=-\alpha \\ b=-\alpha \\ c=\alpha \end{matrix}}$$

<u>hay infinitas soluciones</u>

17.- Estudia la dependencia lineal de los vectores:

a) $\vec{u}(1,2,1)$ $\vec{v}(-1,0,3)$ $\vec{w}(1,2,-1)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2+6-2-6=-4 \neq 0.$$

<u>linealmente independientes</u>

b) $\vec{u}(1,2,3)$ $\vec{v}(1,4,11)$ $\vec{w}(1,1,-1)$ y $\vec{t}(0,1,4)$

4 vectores son siempre <u>linealmente dependientes</u>

18.- Expresa un vector del apartado b) del problema anterior como combinación lineal de los otros tres vectores.

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{t}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 4y + z = 1 \\ 3x + 11y - z = 4 \end{cases} \xRightarrow[E_3 \to E_3 + E_1]{E_2 \to E_2 - E_1} \begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x + 3y \quad = 1 \\ 4x + 12y \quad = 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

$x = 1 - 3y$

$z = -x - y$

$z = -1 + 3y - y = -1 + 2y$

$$\begin{vmatrix} x = 1 - 3\alpha \\ y = \alpha \\ z = -1 + 2\alpha \end{vmatrix}$$

p. e. $\alpha = 0$ $\quad x = 1$, $y = 0$, $z = -1$.

$$\boxed{\vec{u} - \vec{w} = \vec{t}}$$

19.- Dados los vectores $\vec{u}(3,0,1)$ $\vec{v}(1,-1,0)$ obtén las coordenadas de:

$$\vec{a} = 2(3,0,1) - 4(1,-1,0) = (6,0,2) - (4,-4,0) = \boxed{(2,4,2)\ \vec{a}}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - 2(\vec{u} - \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - 2\vec{u} + 2\vec{v} =$$

$$= -\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{5}{2}\vec{v} = -\frac{3}{2}(3,0,1) + \frac{5}{2}(1,-1,0) =$$

$$= \left(-\frac{9}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right) = \boxed{\left(-2, -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)\ \vec{b}}$$

20.- Las coordenadas del vector $\vec{a} = [\vec{AB}]$ son $(2,-1,1)$. Hallar las coordenadas de A siendo las de B $(0,0,1)$

$$(2,-1,1) = (0 - a_1, 0 - a_2, 1 - a_3)$$

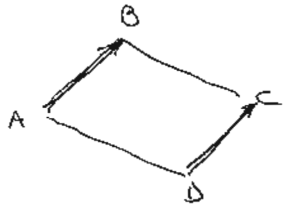
$2 = -a_1$

$-1 = -a_2$

$1 = 1 - a_3$

$$\boxed{A(-2, 1, 0)}$$

21.- Los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ y $C(0,0,1)$ son los vértices del paralelogramo ABCD. Calcula las coordenadas del vértice D.



$$\vec{AB} = \vec{CD}$$

$$(-1, 1, 0) = (d_1, d_2, d_3 - 1)$$

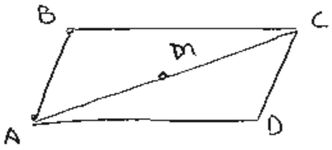
$d_1 = -1$

$d_2 = 1$

$d_3 = 1$

$$\boxed{D(-1, 1, 1)}$$

22.- Las coordenadas de los vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1, 0,0) y B(0,1,0) Hallar las coordenadas de los otros vértices sabiendo que las diagonales se cortan en el punto M(0,0,1)



$$\left(\frac{1+c_1}{2}, \frac{0+c_2}{2}, \frac{0+c_3}{2}\right)=(0,0,1)$$

$c_1=-1$

$c_2=0$

$c_3=2$

$\boxed{C(-1,0,2)}$

$$\left(\frac{0+d_1}{2}, \frac{1+d_2}{2}, \frac{0+d_3}{2}\right)=(0,0,1)$$

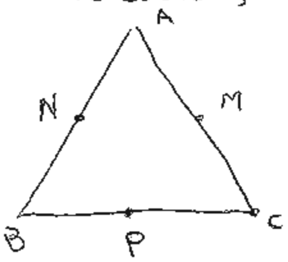
$d_1=0$

$d_2=-1$

$d_3=2$

$\boxed{D(0,-1,2)}$

23. Las coordenadas de los puntos medios de un triángulo ABC son N(1,0,0), M(0,1,0) y P(0,0,1). Hallar las coordenadas de los vértices.



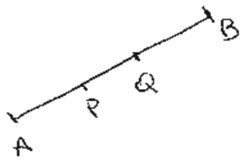
$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)=(1,0,0)$$

$a_1+b_1=2$	$a_1+c_1=0$	$b_1+c_1=0$
$a_2+b_2=0$	$a_2+c_2=2$	$b_2+c_2=0$
$a_3+b_3=0$	$a_3+c_3=0$	$b_3+c_3=2$

$\boxed{A(1,1,-1)}$ $\boxed{B(1,-1,1)}$ $\boxed{C(-1,1,1)}$

24.- Calcular las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB A(2,1,4) B(3,4,2)

a) En 3 partes iguales.



$$\vec{AP}=\frac{1}{3}\vec{AB}$$

$$(p_1-2, p_2-1, p_3-4)=\frac{1}{3}(1,3,-2)$$

$p_1-2=\frac{1}{3} \Rightarrow p_1=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$

$p_2-1=1 \Rightarrow p_2=2$

$p_3-4=-\frac{2}{3} \Rightarrow p_3=-\frac{2}{3}+4=\frac{10}{3}$

$\boxed{P\left(7/3, 2, 10/3\right)}$

$$\vec{AQ}=\frac{2}{3}\vec{AB}$$

$$(q_1-2, q_2-1, q_3-4)=\frac{2}{3}(1,3,-2)$$

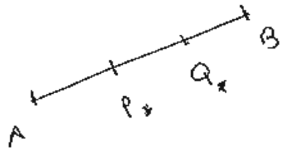
$q_1-2=\frac{2}{3} \Rightarrow q_1=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$

$q_2-1=\frac{6}{3}=2 \Rightarrow q_2=3$

$q_3-4=-\frac{4}{3} \Rightarrow q_3=-\frac{4}{3}+4=\frac{8}{3}$

$\boxed{Q(8/3, 3, 8/3)}$

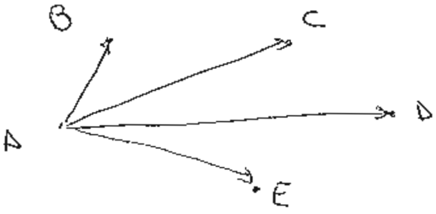
25. Dados los vértices $A(3,3,6)$ y $B(6,12,18)$ que determinan el segmento AB hallar las coordenadas de los punto que dividen al segmento en tres partes iguales.



$$\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} \qquad P(\quad,\quad,\quad)$$

$$\vec{AQ} = \frac{2}{3}\vec{AB} \qquad Q(\quad,\quad,\quad)$$

26. Comprobar si los punto $A(1,2,3)$, $B(4,7,8)$, $C(3,5,5)$ $D(-1,-2,-3)$ y $E(2,2,2)$ son coplanarios.



$\vec{AB}(3,5,5)$ $\qquad \vec{AE}(1,0,-1)$

$\vec{AC}(2,3,2)$

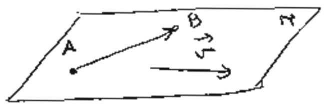
$\vec{AD}(-2,-4,-6)$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \\ -2 & -4 & -6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 15 & 16 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 15 & 16 \\ 0 & \cancel{0} & \cancel{8} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 15 & 16 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 3 \Rightarrow \text{No son coplanarios}$$

27.- Hallar las ecuaciones de los planos siguientes:

a) Pasa por los puntos $A(1,0,3)$ y $B(2,2,1)$ y tiene como vector direccional $\vec{v}(2,0,1)$

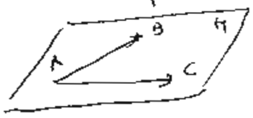


$\pi : \{A ; \vec{AB}, \vec{v}\}$

$\vec{AB}(1,2,-2)$

$$\boxed{\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha + 2\beta \\ y = 2\alpha \\ z = 3 - 2\alpha + \beta \end{cases}}$$

b) Pasa por los puntos $A(1,3,2)$, $B(1,-2,1)$ y $C(1,0,0)$.



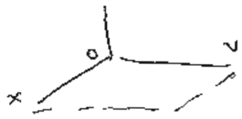
$\pi : \{A ; \vec{AB}, \vec{AC}\}$

$\vec{AB}(0,-5,-1)$

$\vec{AC}(0,-3,-2)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 3 - 5\alpha - 3\beta \\ z &= 2 - \alpha - 2\beta \end{aligned}}$$

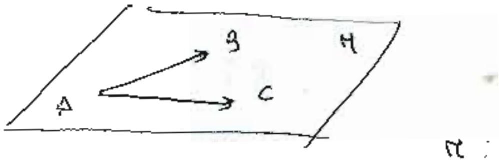
c) Pasa por el punto $A(2,-3,3)$ y es paralelo al plano OXY.



$XOY : z = 0$

$$\boxed{z = 3}$$

28.- Probar que los puntos $A(1,-1,2)$, $B(2,2,-3)$ y $C(1,1,0)$ no están alineados y hallar el plano que los contiene.



$\vec{AB}(1,3,-5)$ $\quad \vec{AB} \nparallel \vec{AC}$

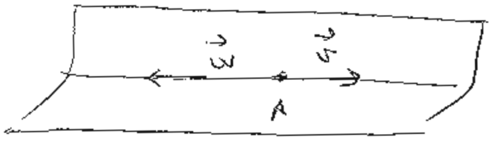
$\vec{AC}(0,+2,-2)$

$\pi : \{A ; \vec{AB}, \vec{AC}\}$

$$\boxed{H : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 + 3\alpha + 2\beta \\ z = 2 - 5\alpha - 2\beta \end{cases}}$$

29.- ¿Es posible que un plano quede determinado por el punto $A(2,3,4)$ y los vectores $\vec{v}(1,2,3)$ $\vec{w}(-4,-8,-12)$

<u>no</u> es posible pues $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tienen la misma dirección



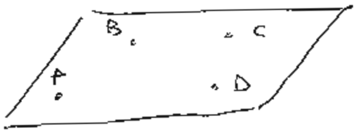
$\vec{w} = -4\vec{v}$

hay infinitos planos

30.- ¿Por qué una mesa con cuatro patas puede "cojear" pero nunca cojea una mesa con tres patas?

– Tres puntos determinan un plano luego si la mesa tiene tres patas siempre estarán en el plano del suelo. Si tiene cuatro patas puede una de ellas no estar en el suelo.

31.- ¿Qué relación se ha de verificar entre los parámetros a, b y c para que los puntos $A(1,0,1)$ $B(1,1,0)$, $C(0,1,1)$ y $D(a,b,c)$ sean coplanarios



$\vec{AB}(0,1,-1)$

$\vec{AC}(-1,1,0)$

$\vec{AD}(a-1,b,c-1)$

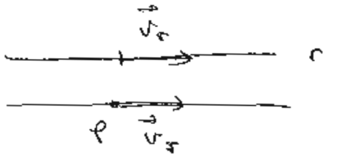
$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a-1 & b & c-1 \end{vmatrix} = b + a - 1 + c - 1 = 0 \Rightarrow a + b + c - 2 = 0$$

$$a = 2 - b - c.$$

$$\boxed{D(2-\alpha-\beta, \alpha, \beta)}$$

32.- Hallar las ecuaciones de las siguientes <u>rectas</u>

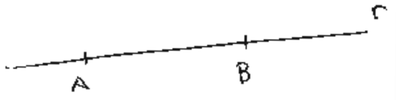
a) Pasa por el punto $P(1,3,4)$ y es paralela a la recta $r: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+5}{2}$.



$\vec{v}_s : \{ P ; \vec{v}_r \}$.

$$\boxed{\frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{2}}$$

b) Pasa por $A(2,-1,3)$ y $B(5,0,4)$

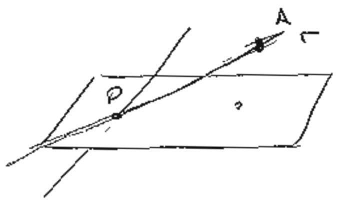


$r : \{ A ; \vec{AB} \}$

$\vec{AB}(3,1,1)$

$$\boxed{\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}}$$

c) Pasa por el punto $A(3,2,-5)$ y la intersección del eje OX con el plano $3x - y - 7z = -9$.



P: pto intersección OX con π.

$OX : \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

$\pi : 3x - y - 7z = -9$

$3x = -9$

$x = -3$

$P(-3,0,0)$

$r : \{ P ; \vec{PA} \}$

$\vec{PA}(3,2,-5)$

$$\boxed{r: \frac{x+3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-5}}$$

d) Pasa por el punto $P(2,-1,5)$ y es paralela a los planos $\pi_1 : x - 3y + z = 0$ $\quad \pi_2 : 2x - y + 3z - 5 = 0$.

$\vec{n}_{\pi_1}(1,-3,1)$

$\vec{n}_{\pi_2}(2,-1,3)$

$$\vec{v} = \vec{n}_{\pi_1} \wedge \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

$\vec{v}(-8,-1,5)$

$$\boxed{\frac{x-2}{-8} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{5}}$$

Hallar las ecuaciones de los <u>PLANOS</u> siguientes:

33.- Pasa por el punto $P(3,2,5)$ y es paralelo al plano $2x - y + 3z = 0$.

planos paralelos $2x - y + 3z + D = 0$.

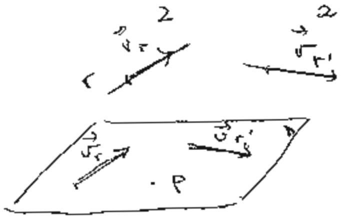
Pasa por $P(3,2,5)$ $\quad 2 \cdot 3 - 2 + 3 \cdot 5 + D = 0$

$19 + D = 0 \Rightarrow D = -19$.

$$\boxed{2x - y + 3z - 19 = 0}$$

34.- Pasa por el punto $P(1,0,0)$ y es paralelo a

$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{4}$ y $r': \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-4}{-1}$.



$\pi : \{ P ; \vec{v}_r , \vec{v}_{r'} \}$.

$\vec{v}_r (2, 2, 4)$

$\vec{v}_{r'} (3, 0, -1)$

$P (1, 0, 0)$

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha + 3\beta \\ y = 2\alpha \\ z = 4\alpha - \beta \end{cases}}$$

35.- Pasa por la intersección del plano $\pi' : x + y - z = 0$ y la recta $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{0}$ y además es paralelo al plano $\pi'' : x + 2y + 3z - 3 = 0$

P : pto de intersección de r y π'

$r: \begin{cases} x = 3 + 2\alpha \\ y = 4 + 3\alpha \\ z = 2 \end{cases}$ $\quad 3 + 2\alpha + 4 + 3\alpha - 2 = 0$

$5\alpha + 5 = 0 \Rightarrow \alpha = -1$

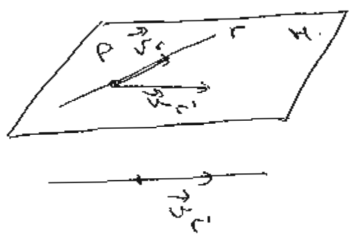
$P(1, 1, 2)$

Planos paralelo a π'' $\quad x + 2y + 3z + D = 0$.

pasan por P $\quad 1 + 2 + 6 + D = 0 \Rightarrow D = -9$

$$\boxed{\pi : x + 2y + 3z - 9 = 0}$$

36.- Contiene a $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y es paralela a $r': \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$.



$r: \begin{cases} P(2, -1, 0) \\ \vec{v}_r (1, 2, 1) \end{cases}$ $\qquad r' \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 3 \end{cases}$

$r' \begin{cases} Q(0, 1, 3) \\ \vec{v}_{r'} (1, 2, 0) \end{cases}$

$\pi : \{ P ; \vec{v}_r , \vec{v}_{r'} \}$

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x = 2 + \alpha + \beta \\ y = -1 + 2\alpha + 2\beta \\ z = \alpha \end{cases}}$$

Hallar las ecuaciones de las RECTAS siguientes.

37.- $r: \frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{4}$ expresada como intersección de planos.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x-5}{2} = \frac{y+3}{-1} \Rightarrow -x + 5 = 2y + 6 \Rightarrow x + 2y + 1 = 0 \\ \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{4} \Rightarrow 4y + 12 = -z + 2 \Rightarrow 4y + z + 10 = 0 \end{array}\right\} : r$$

38.- $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$ en forma continua.

$x + 2y + z = 0$

$x - 3y + 2z = 4$

$x + 2y + z = 0 \Rightarrow x = -2y - 4 - 5y = -4 - 7y$

$5y - z = -4 \Rightarrow z = 4 + 5y$

$\begin{cases} x = -4 - 7\alpha \\ y = \alpha \\ z = 4 + 5\alpha \end{cases}$

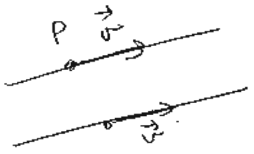
$P(-4,0,4)$

$\vec{v}(-7,1,5)$

$$\boxed{\frac{x+4}{-7}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{5}}$$

39.- Pasa por $P(1,3,4)$ y es paralela a la recta

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+5}{2}.$$



$r: \{P;\vec{v}\}$

$\vec{v}(-3,1,2)$

$$\boxed{\frac{x-1}{-3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}}$$

40.- Pasa por $P(2,4,-1)$ y es paralela a la recta $\begin{cases} x+10y+z=82 \\ -x+2y+z=22 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+10y+z=82 \\ -x+2y+z=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+10y+z=82 \\ 12y+2z=104 \end{cases} \Rightarrow z=52-6y$$

$$x=82-10y-52+6y=30-4y.$$

$$r: \begin{cases} x=30-4\alpha \\ y=\alpha \\ z=52-6\alpha \end{cases} \qquad \vec{v}(-4,1,-6)$$

$$s:\{P,\vec{v}\} \quad \boxed{s: \frac{x-2}{-4}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{-6}}$$

42.- Es paralela a la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-1}$ y pasa por el pto de intersección de la recta $s \equiv \begin{cases} x=1+4t \\ y=-3+2t \\ z=-2+3t \end{cases}$ y el plano $\pi: x-y+z=5$

P: Pto de intersección de s y π.

$$1+4t+3-2t-2+3t=5$$

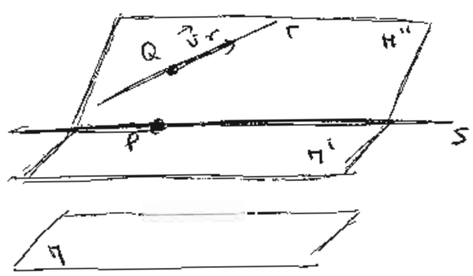
$$5t=3 \qquad t=3/5$$

$P(17/5, -9/5, -1/5)$.

$s:\{P;\vec{v}_r\}$ $\qquad \vec{v}_r(2,3,-1)$

$$\boxed{s: \begin{cases} x=17/5+2\alpha \\ y=-9/5+3\alpha \\ z=-1/5-\alpha \end{cases}}$$

43.- Pasa por $P(2,3,4)$, es paralela al plano $\pi: 3x-2y+3=0$ y es coplanaria con la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-4}$



π': plano paralelo a π que pasa por P

π'': plano que contiene a r y pasa por P

π': $3x - 2y + D = 0$

$3 \cdot 2 - \cancel{2} \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow D = 0.$

$\pi' : 3x - 2y = 0.$

π'' : $Q(1, 2, 3)$

$\vec{v}_r (2, -1, -4)$

$\vec{PQ} (-1, -1, -1)$

$\pi'' : \{ P ; \vec{PQ}, \vec{v}_r \}.$

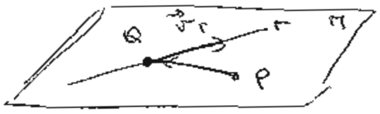
$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$(x-2) \cdot 3 - (y-3) \cdot 6 + (z-4)\, 3 = 0.$

$x - 2 - 2y + 6 + z - 4 = 0 \Rightarrow x - 2y + z = 0.$

$$\boxed{s : \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}}$$

44.- Ecuación del plano que pasa por $P(1, 0, 1)$ y contiene a la recta $r: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 2 - 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$



$\pi : \{ P ; \vec{v}_r, \vec{PQ} \}.$

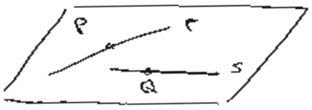
$Q(-1, 2, 0)$

$\vec{v}_r(1, -3, 1)$

$\vec{PQ}(-2, 2, -1.$

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x = 1 + \alpha - 2\beta \\ y = 0 - 3\alpha + 2\beta \\ z = 1 + \alpha - \beta \end{cases}}$$

45.- Comprueba que las rectas $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{0}$ y $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-4}$ son coplanarias.



$P(2, 3, 4)$ $\vec{v}_r(2, 3, 0)$ $\vec{PQ}(-1, -1, -1)$

$Q(1, 2, 3)$ $\vec{v}_s(2, -1, -4)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 2 - 6 + 8 \neq 0$$ no son coplanarias.

<u>se cruzan</u>

46.- Determinar el valor de K para que las rectas r y r' sean paralelas siendo:

a) $r : \begin{cases} 4x + 5y + 2z - 3 = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$ $\quad r' : \begin{cases} 5x + y + 2Kz - 7 = 0 \\ 10x + 9y + \frac{K}{2}z + 9 = 0. \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 8x + 10y + 4z - 6 = 0 \\ - \quad x + 3y + 4z \quad = 0. \\ \hline 7x + 7y \quad - 6 = 0. \end{array}$$

$y = \frac{3}{7} - x$

$2z = 3 - 4x - 5\left(\frac{8}{7} - x\right) =$

$= \frac{-9}{7} + x \Rightarrow z = \frac{-9}{14} + \frac{x}{2}$

$x = \alpha$

$y = \frac{6}{7} - \alpha$

$z = -\frac{9}{14} + \frac{\alpha}{2}$

$\vec{v}_r\left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{r} 10x + 2y + 4Kz - 14 = 0 \\ - \quad 10x + 9y + \frac{K}{2}z + 9 = 0 \\ \hline 7y - \frac{7}{2}Kz + 23 = 0. \end{array}$$

$x = \frac{144}{70} - \frac{K}{2}\beta$

$y = -\frac{23}{7} + \frac{K}{2}z$

$\vec{v}_{r'}\left(\frac{-K}{2}, \frac{K}{2}, 1\right)$

$$r:\begin{cases} x=\alpha \\ y=6/7-\alpha \\ z=-9/14+\alpha/2 \end{cases} \qquad \vec{v}_r\,(2,-2,1) \qquad r':\begin{cases} x=\frac{144}{70}-\frac{k}{2}\beta \\ y=-\frac{23}{7}+\frac{k}{2}\beta \\ z=\beta \end{cases} \qquad \vec{v}_{r'}\,(-k,k,2)$$

$$\frac{2}{-k}=\frac{-2}{k}=\frac{1}{2}$$ <u>No</u> pueden ser paralelas.

47.- Determinar el valor de k para que las rectas r y r' sean coplanarias

$$r:\begin{cases} x-2z-1=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \qquad r':\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ -2y+2z-k=0 \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} x=1+2z \\ y=2+z \\ z=z \end{cases} \qquad r:\begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=2+\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \qquad x=-y-z-1=\frac{k}{2}\cancel{+z}\cancel{-z}-1=\frac{k-2}{2}-2z$$

$$y=-\frac{k}{2}+z \qquad r'=\begin{cases} x=\frac{k-2}{2}-2\beta \\ y=-\frac{k}{2}+\beta \\ z=\beta \end{cases}$$

$$z=z$$

$\vec{v}_r\,(2,1,1)$ $\qquad$ $\vec{v}_s\,(-2,1,1)$

$P\,(1,2,0)$ $\qquad$ $\vec{Q}\,\left(\frac{k-2}{2},-\frac{k}{2},0\right)$

$$\vec{PQ}\left(\frac{k-4}{2},\frac{-k-4}{2},0\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ \frac{k-4}{2} & \frac{-k-4}{2} & 0 \end{vmatrix}=2k+8=0 \Rightarrow \boxed{k=-4}$$

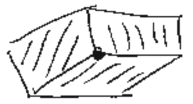
48.- Resolver el sistema e interpretarlo geométricamente.

$$\begin{cases} 3x+3y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 7x+6y+z=0 \end{cases}$$ son tres planos.

Es un sistema homogéneo $\Rightarrow$ compatible, no hay planos coincidentes ni paralelos.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}=3-12+21+7-6-18=-5\neq 0$$

$r(A)=3 \Rightarrow$ Comp. determinado $\Rightarrow$ $\boxed{\text{son tres planos que se cortan en un punto}}$

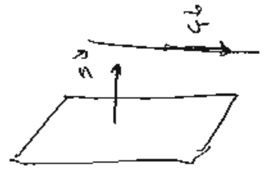


$P(0,0,0)$

49. Determinar b para que la recta $r: \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{b}$ no corte al plano $\pi: 2x-4y+5z=0$.

$\vec{v}_r\,(3,2,b)$

$\vec{n}_\pi\,(2,-4,5)$



$$3\cdot 2-2\cdot 4+5b=0$$
$$-2+5b=0$$
$$\boxed{b=2/5}$$